MEMORIA (*)

Em que se pertende dar a solução do Programma de Astronomia proposto pela Academia Real das Sciencias em 24 de Junho de 1820.

POR MATTHEUS VALENTE DO COUTO.

ADVERTENCIA.

Em 24 de Junho de 1820 propoz a Academia Real das Sciencias de Lisboa hum Programma, por cuja solução ainda se espera até o fim de Abril do presente anno de 1822. Eis-aqui o Programma:

Mostrar tanto pelo calculo, como por observação, a influencia do erro, que póde resultar nos angulos horarios do Sol, e da Lua de se não attender a figura da Terra.

Sabemos que o nosso sabio Consocio (defunto) o Sñr. Conselheiro José Monteiro da Rocha já tinha dito na Explicação das Ephemerides de Coimbra de 1804, quaes erão as correcções, que se devião fazer no calculo do angulo horario para se attender á figura da terra; mas como o Illustre Author não mostrou a quantidade do erro, que se podia commetter despresando as sobreditas correcções, e como ordinariamente se não attende a ellas no mencionado calculo, por isso he indespensavel, para segurança do calculador, dar a solução do referido Programma.

Per-

(*) Appresentada na Sessão de 20 de Fevereiro de 1822.

Pertendemos por tanto resolver o Programma, isto he, dar a Formula analytica do erro, que se commette despresando a figura da terra, empregando nesta analyse as formulas differenciaes dos triangulos esfericos; por nos parecer este methodo mais expedito na investigação de taes Problemas. Mas para nada avançar gratuitamente, nem deixar escrupulo algum ao calculador sobre o resultado de seus calculos; mostraremos depois (em Notas) que, entre certos limites, he licito usar das mesmas formulas infinitessimas em lugar das formulas finitas dos triangulos esfericos, cujas demonstrações havemos dado na Parte II do Tomo III das *Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa.*

E concluiremos a nossa Solução mostrando, que não he preciso ter attenção ás correcções da figura da terra no calculo, que ordinariamente se faz do angulo horario do Sol e das estrellas: o que não só poupa tempo e trabalho ao calculador, como tambem lhe dá a segurança de poder despresar estas correcções sem erro notavel no resultado de seu calculo. Mas que a respeito do ang. hor. da Lua nos não podemos dispensar de attender as mencionadas correcções da figura da terra, especialmente quando este ang. servir para achar a Ascenção recta da Lua; e com ella procurar o tempo no meridiano das Ephemerides, a fim de concluir a longitude do lugar da observação.

SOLUÇÃO DO PROGRAMMA.

1. ANTES de dar a solução do Programma faz-se preciso lembrar os principios seguintes. Sejão A, B, C os angulos, e a, b, c os lados de hum triangulo esferico.

2. Quando no dito triangulo for hum lado a, e o angulo adjacente B constantes, temos que

$$db = dc. \text{Cos.}\, A;$$

isto he, que *a differencial do lado opposto ao angulo constan-*

te

te he igual á differencial do lado adjacente ao angulo constante multiplicada pelo coseno do angulo opposto ao lado constante.

3. E na mesma hypothese, temos que

$$dC = \frac{dc.\ \text{Sen.}\ A}{\text{Sen.}\ b};$$

isto he, que *a differencial do angulo adjacente ao lado constante he igual ao producto da differencial do lado adj. ao ang. const. pelo Seno do ang. opp. ao lado const. dividido pelo Seno do lado opp. ao ang. constante.*

4. Sabe-se que denotando v o angulo da vertical com o raio da terra; β o achatamento; e L a latitude do lugar, temos que $v = \beta.$ Sen. $2\,L$. E no caso de ser $\beta = \frac{1}{300}$, $L = 45^\circ$, he o maior valor de $v = \frac{1}{300}$, que sendo reduzido a minutos de gráo dá $v = 11',5$.

5. Passemos agora á solução do Programma. Para isso: imagine-se, ou faça-se a figura de hum triangulo esferico; escrevendo nos vertices de seus angulos as letras maiusculas A, B, C. Denote o ponto A o zenith do observador; o ponto B o polo do mundo; e o ponto C o centro de hum astro, cuja altura esteja correcta sómente da refracção, mas não da parallaxe. Representem as mesmas letras maiusculas A, B, C os angulos do triangulo; e as letras minusculas a, b, c os lados respectivamente oppostos. A este primeiro triangulo chamaremos *Triangulo-primittivo* para o distinguir de outro triangulo, a que chamaremos *Triangulo-variado*, de que vamos a tratar.

6. Sabe-se, que para reduzir a latitude de hum lugar ao centro da terra, he preciso diminuilla do angulo da vertical $= v$ pelo n.° (4); e tomar depois o complemento desta latitude assim reduzida para ter hum lado $= c + v$ do triangulo esferico, que acima chamámos *Triangulo-variado*. Supponhamos agora que a quantidade v he a differencial (additiva) do lado c, será $c + dc$ hum lado do triangulo-variado; outro será $b \pm db$; e o terceiro será a distancia polar apparente $= a$, não havendo parallaxe.

7. Isto posto: consideremos por ora sómente a figura

da terra pelo que ella influe na mudança do lugar do zenith do observador, e não attendamos ao lugar que o observador occupa na sua superficie; isto he, supponhamos, que o astro (denotado pela letra C) não tem parallaxe, ou que sua parallaxe he tão pequena que se póde desprezar sem erro notavel: então podemos (no triangulo-primittivo) suppor constantes o angulo horario B, e a distancia polar a; e nesta hypothese, teremos pelos n.os (2 e 3) que

$$db = dc. \text{Cos. } A;$$

$$dC = \frac{dc. \text{Sen. } A}{\text{Sen. } b}$$

isto he, que *a differencial db do complemento da altura he igual ao producto do ang. da vertical dc pelo coseno do azimuth A do astro.* E que *a differencial dC do angulo parallatico he igual ao producto do ang. da vert. pelo seno do azimuth, dividido pelo seno do complemento da alt. app. do centro do astro.*

8. Segue-se pois; que, quando se poder desprezar a parallaxe do astro, cujo ang. hor. se calcula, então he indifferente achar o ang. hor. B pelo *triangulo-primittivo*, ou pelo *triangulo-variado*; porque este angulo horario B he commum a ambos os triangulos: e por isso deve-se preferir (por mais facilidade) fazer antes o calculo do ang. horar. pelo triangulo primittivo, cujos lados são a, b, c.

9. Mas se o astro (denotado pela letra C) tiver huma parallaxe sensivel; e for p a parallaxe de altura no *triangulo-primittivo*; e p' a parallaxe de altura no *triangulo-variado*; e π a parallaxe horisontal do dito astro, será $p = \pi. \text{Sen. } b$; e $p' = \pi. \text{Sen. } (b + db)$. Vê-se então, que, devendo estas duas parallaxes p e p' serem applicadas cada huma a cada hum dos dous lados oppostos ao angulo horario B nos dous triangulos primittivo e variado, deve necessariamente o ang. hor. B ter duas variações differentes pelas variações que as parallaxes produzem nos dous lados oppostos b, e $b + db$. E neste caso já não he indifferente achar o angulo horario por qualquer dos dous mencionados triangulos, como se tinha dito em o numero antecedente.

10.

10. Vejamos por tanto, quaes são as variações do angulo horario B por effeito das sobreditas parallaxes p e p'. Para isso: podemos agora suppor que

(1.°) . . . No triangulo primittivo são constantes o lado c, e o angulo A; e por isso teremos pelo n.° (3) . . . . . .

$$dB = \frac{db.\ \text{Sen.}\ C}{\text{Sen.}\ a};$$

(2.°) . . . No triangulo variado são constantes o lado $c + dc$, e o angulo $A + dA$; e por isso teremos pelo n.° (3) . . .

$$d'B = \frac{d\,(b + db).\ \text{Sen.}\ (C + dC)}{\text{Sen.}\ a}.$$

Mas he neste caso $db = p = \pi.$ Sen. b; e $d\,(b + db) = = p' = \pi.$ Sen. $(b + db)$ logo substituindo estes valores nas duas equações acima, teremos . . . .

$$dB = \frac{\pi.\ \text{Sen.}\ b.\ \text{Sen.}\ C}{\text{Sen.}\ a},$$

$$d'B = \frac{\pi.\ \text{Sen.}\ (b + db).\ \text{Sen.}\ (C + dC)}{\text{Sen.}\ a};$$

E tomando a differença $(d'B - dB)$ destas duas equações, acharemos . . . . (α)

$$d^2B = \frac{\pi}{\text{Sen.}\ a}\ d\ (\text{Sen.}\ b.\ \text{Sen.}\ C).$$

Esta differencial segunda d^2B do ang. hor. mostra o erro, que se commette no ang. hor. de se não attender á figura da terra, especialmente no calculo das parallaxes.

11. Differenciando o segundo membro da equação (α) do numero antecedente, teremos . . . .

$$d^2B = \frac{\pi}{\text{Sen.}\ a}\ (db.\ \text{Cos.}\ b.\ \text{Sen.}\ C + dC.\ \text{Sen.}\ b.\ \text{Cos.}\ C);$$

e nesta substituindo os valores de db, e dC achados em o n.° (7), teremos . . . . ;

$$d^2B = \frac{\pi}{\text{Sen.}\ a}\ (\text{Cos.}\ b.\ \text{Cos.}\ A.\ \text{Sen.}\ C + \text{Sen.}\ A.\ \text{Cos.}\ C)\ dc;$$

mas sabe-se pela Trigonometria esferica, que he

$$\text{Cos.}\ b.\ \text{Cos.}\ A.\ \text{Sen.}\ C + \text{Sen.}\ A.\ \text{Cos.}\ C = \text{Cos.}\ c.\ \text{Sen.}\ B,$$

logo (substituindo) teremos . . . . (β)

$$d^2B = \frac{\text{Cos. } c. \text{ Sen. } B}{\text{Sen. } a} \pi \, dc.$$

12. Analysemos agora os limites do erro, que póde produzir no ang. hor. B a differencial segunda d^2B achada pela equação (β), na qual he sempre Cos. c. Sen. $B < 1$; e por isso tambem será sempre . . . . (γ)

$$d^2B < \frac{\pi.\, dc}{\text{Sen. } a}.$$

13. Na equação (γ) do numero antecedente, suppondo, que (4) o maior valor do angulo da vertical $dc = \frac{1}{100}$, e que o menor valor da distancia polar $a = 58°$ (o que acontece a respeito do Sol, Lua, e Planetas) teremos (δ)

$$d^2B < \frac{\pi}{254};$$

vê-se por esta formula, que, sendo (para huma Estrella) $\pi = 0$; e (para hum Planeta) $\pi = 30''$; e (para o Sol) $\pi = 10''$; em qualquer destes casos, he o valor de d^2B muito menor que $1''$ de gráo.

14. Mas como (para a Lua) $\pi = 3600''$, será . . . . .

$$d^2B < 14'';$$

estes $14''$ de gráo, reduzidos a tempo a razão de $15°$ por hora, dão $56'''$ de tempo. Logo o valor do erro d^2B he menor que $1''$ de tempo pelo angulo horario da Lua, que he o caso menos favoravel. E se na expressão (γ) do n.° (12) fizermos $a = 90°$; $dc = \frac{1}{100}$; e $\pi = 3600''$; acharemos $d^2B < 12''$ de gráo.

15. Parece-nos por tanto, que desta Analyse se póde deduzir, que não he preciso ter attenção á figura da terra no calculo, que ordinariamente se faz, do angulo horario do Sol, dos Planetas, e das Estrellas: ainda no caso de ser preciso usar do ang. hor. em gráos, e não em tempo.

16. Porém quando se trata de achar o angulo horario da Lua em gráos; então parece-nos preciso (conforme o que tinha dito o nosso Illustre Consocio o Sñr. José Montei-

tei-

teiro do Rocha) que se devem corrigir os lados do triangulo, pelo qual se calcula o angulo horario, da maneira seguinte:

(1.°) Corrija-se a distancia c do polo ao zenith pela formula $dc = \frac{1}{100}$. Sen. 2 lat.;

(2.°) Depois a distancia b do centro do astro ao zenith pela formula $db = dc$. Cos A;

(3.°) E finalmente a distancia $b + db$ já correcta, corrija-se novamente pela formula . . . .

$$\delta b = \pi. \text{ Sen. } (b + db).$$

Feitas as sobreditas tres correcções, teremos os tres lados do triangulo esferico; a saber: $c + dc$; $b \pm db - \delta b$; e a: este lado a he a distancia polar que se acha pelas Ephemerides já reduzida ao centro da terra. E com estes tres lados correctos se calculará o ang. hor. da Lua. Tal nos parece ser a Solução do Programma proposto.

ADVERTENCIA.

A necessidade de calcular pelo n.° antecedente o ang. hor. da Lua em gráos com tanta exactidão; he para achar (por meio da observação) a Ascenção recta da Lua: e com ella achar depois (por meio das Ephemerides) a longitude do lugar da observação. E com effeito: variando a Asc. Rect. da Lua (pouco mais ou menos) 12 gráos por dia: he claro, que se o erro do ang. hor. fosse (*hum minuto de grão*), achar-se-hia de erro na longitude do lugar (*dous minutos de tempo*), que corresponde a *meio grão* de erro na longitude: e assim á proporção.

NO-

NOTAS.

(a). Vimos em o n.° (4) que a variação do lado c, isto he, que $dc = 12'$, ou $dc = 0{,}0033$ etc. em partes do raio $= 1$. Mostraremos agora que $db < dc$: e com effeito no triangulo, cujos lados são, b; dc; e $b + db$, temos que $b + db < b + dc$; logo he $db < dc$.

(b). Havemos mostrado (*) que (em quanto não for hum arco $x > 72',5$) póde suppor-se Sen. $x = x$, e tg. $x = x$, sem erro de $1''$ de gráo.

(c). Havemos tambem mostrado (*) a respeito dos triangulos esfericos a seguinte formula de variações finitas . . . . (A)

$$\text{Sen.}\ \tfrac{1}{2}\delta A = -\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\delta c.\ \text{Cot.}\ (b + \tfrac{1}{2}\delta b).\ \text{Sen.}\ (A + \tfrac{1}{2}\delta A);$$

na qual, suppondo $\delta b = \delta c = 12'$, e Sen. $(A + \frac{1}{2}\delta A) = 1$, teremos Sen. $\frac{1}{2}\delta A =$ tg. $6'$. Cot. $(b + 6')$ sem attenção ao signal. Mas para que se possa tomar o arco pelo Seno, he preciso que seja . . . . .

$$\text{tg. } 6'.\ \text{Cot. } (b + 6') = \text{Sen. } 72',5;$$

donde se deduz, que deve ser $b + 6' = 4° 44'$; para que a formula (A) se possa (sem erro de $1''$) escrever assim . . . . . (B)

$$dA = -\ dc.\ \text{Cot. } b.\ \text{Sen. } A.$$

(d). Havemos tambem mostrado (*) que . . . . (C)

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}\delta b = \text{tg. } \tfrac{1}{2}\delta c.\ \text{Cos. } A - \text{tg. } \tfrac{1}{2}\delta c.\ \text{tg. } \tfrac{1}{2}\delta A.\ \text{Sen. } A;$$

e nesta (substituindo o valor de $\frac{1}{2}\delta A = 72',5$), teremos a seguinte . . . . , . (D)

$$db = dc.\ \text{Cos. } A - \tfrac{1}{2}\ dc.\ dA.\ \text{Sen. } A;$$

sem erro de $1''$, em quanto não for $b < 4° 44'$; como acabámos de vêr em a Nota (c) antecedente.

(e). Advirta-se agora que se na formula (D) escrevessemos o valor de (dA) dado pela formula (B) teriamos a seguinte . . (E)

$$db = dc.\ \text{Cos. } A + \tfrac{1}{2}\ dc.^2\ \text{Sen.}^2\ A.\ \text{Cot. } b;$$

e acha-se, pelo calculo, que, não sendo $b < 48° 50'$, póde escrever-se esta formula (E) assim . . . . (F)

db

(*) Na Parte II do Tomo III das *Memorias da Academia das Sciencias.*

$$db = dc.\ \text{Cos.}\ A$$

sem erro de 1″ de gráo. Ora como havemos feito uso da formula (F), e não da formula (E), que póde ter lugar nas maiores alturas do astro, isto he, até ser $b = 4^\circ\ 44'$, ou até quasi 85° de altura: por isso adiante veremos que era indifferente usar nesta Analyse de huma ou outra sem prejuizo da exactidão do Calculo, de que se trata.

(f). Passemos á formula finita das variações dos triangulos esfericos (*) a saber . . . . (G)

$$\text{Sen.}\ \delta C = \frac{\text{Sen.}\ \delta c}{\text{Sen.}\ b}.\ \text{Sen.}\ (A + \tfrac{1}{2}\delta A);$$

na qual (sendo $\delta c = 12'$) he preciso que (pelo menos) seja $\frac{\text{Sen.}\ \delta c}{\text{Sen.}\ b} = \text{Sen.}\ 72',5$ para que se possa tomar o arco (δC) pelo Seno deste mesmo arco: e nesta hypothese acharemos $b = 9^\circ\ 31',7$. Logo (não sendo $b < 9^\circ\ 31',7$) póde usar-se da seguinte formula . . (H)

$$\delta C = \frac{\delta c.\ \text{Sen. A}}{\text{Sen.}\ b},$$

sem erro de 1″ de gráo.

(g). Porém, se, em vez de suppor $\delta c = 12'$ (como em a Nota antecedente) suppposermos agora $\delta c = 60'$; acharemos $b = 55^\circ\ 51',1$. Logo a formula (H) he exacta até segundos de gráo, em quanto não for $b < 55^\circ 51',1$. Note-se pois, que esta formula (H) he a mesma, que a formula achada em o n.° (10): e por isso, se a formula . . . $\delta B = -\frac{db.\ \text{Sen.}\ C}{\text{Sen.}\ a}$ he exacta, em quanto não for $a < 55^\circ 51',5$ (como acabámos de vêr), com muita maior razão será exacta até 1″ de gráo, sendo $a = 58^\circ$; que he o caso, de que se tratou em o n.° (33).

(h). Resta-nos sómente mostrar, que se podia (nesta Analyse) usar da formula (F) em lugar da formula (E) para obter a formula (β) do n.° (11). Com effeito se na differencial da formula (α) do n.° (10) substituirmos o valor de db dado pela formula (E) da Nota (e); e tambem o valor de dC dado pela formula (H) da Nota (f): acharemos a seguinte . . . . (I)

$$d^2B = \frac{\text{Cos.}\ c.\ \text{Sen. B}}{\text{Sen.}\ a}\pi.\ dc + \frac{\text{Sen.}^2 A\ \text{Cos.}^2 b.\ \text{Sen.}\ C}{2.\ \text{Sen.}\ a.\ \text{Sen.}\ b}\pi.\ dc^2;$$

esta correcção póde-se desprezar sem erro de 1″ de gráo: porque, sendo $\frac{1}{2}\ dc^2 = 0{,}000005544$; $\pi = 0{,}01745$; $a = 55^\circ\ 51',1$; e $b =$

$b = 1^\circ\ 23'$; achar-se-ha que a quantidade seguinte $\frac{\pi.\ dc^2}{\text{Sen.}^2 a.\ \text{Sen.}\ b}$ he proximamente hum segundo de gráo; e como ella ainda está multiplicada por Sen.$^2 A$. Cos.$^2 b$. Sen. C que he < 1; segue-se, que a dita Correcção póde ser desprezada.

(i) Conclue-se pois de tudo o que fica dito em as Notas antecedentes, que a equação (β) achada em o n.° (11) tem o mesmo gráo de exactidão, que teria, se em lugar do valor de db, achado em o n.° (7), usassemos do valor de db dado pela formula (E) da Nota (e). Por tanto foi-nos licito usar nesta Analyse das formulas differenciaes em lugar das formulas finitas das variações dos triangulos esfericos, sem receio de errar em 1″ de gráo. Eis-aqui o que haviamos promettido demonstrar do modo que nos foi possivel.

ME-