
* C A L C U L O

D A S

N O T A Ç Õ E S .

A I.^a P A R T E

P O R F R A N C I S C O S I M Õ E S M A R G I O C H I :

A I I.^a P A R T E

P O R M A T T H E U S V A L E N T E D O C O U T O .

I N T R O D U C Ç ã O .

GRANDES Analystas tem notado a Analogia dos expoentes das differenças com os do binomio , mas esta nota tem sido huma conclusão de Theoremas laboriosamente achados , e não hum principio para os achar com facilidade attendivel.

Fazer admissivel e mais geral este principio , e patente a sua utilidade he o objecto deste escripto.

Para isso precisamos pedir poucas innovações no algorithmo recebido , que nos devem ser permittidas pela sua simplicidade e grande uso.

* Esta Memoria foi apresentada á Academia na Sessão de 4 de Novembro de 1812.

I.ª P A R T E.

1. **P**O_R V entendemos o estado variado de qualquer funcção ; assim he $V\Phi(x, y) = \Phi(x+i, y+i') = \Phi(Vx, Vy)$: por VV ou V^2 o segundo estado variado ; assim he $V^2\Phi(x, y) = V\Phi(Vx, Vy) = \Phi(V^2x, V^2y)$; e assim por diante : logo he $V^n\Phi(x, y) = \Phi(V^n x, V^n y)$.

2. Sendo x raiz principal ou raiz tambem de y e das mais variaveis incluidas em Φ ; então só o incremento i he elegivel ; e como se sabe , convêm toma-lo constante , ou sem x necessario , para se evitarem absurdos , e para as expressões , que delle dependerem , significarem alguma cousa ; e nesta hypothese he $V^n\Phi x = \Phi(x+ni)$.

3. Por R entendemos o indice da operação que applicada ao estado variado de huma funcção a restabelece no estado antecedente ; assim he $R V\Phi(x, y) = \Phi(x, y)$, e logo tambem $R\Phi(x, y) = R V\Phi(x-i, y-i') = \Phi(x-i, y-i') = \Phi(Rx, Ry)$, e logo tambem $R^n\Phi x = \Phi(x-ni) = V^{-n}\Phi x$.

4. Os symbolos subnotados com as raizes são parciaes , ou relativos a essas raizes sómente : assim he $V_x\Phi(x, y) = \Phi(x+i, y)$, e $V_y\Phi(x, y) = V_x V_y\Phi(x, y)$.

5. Quando não precisarmos das raizes expressas , usaremos de u em lugar de $\Phi(x, y, \&c.)$

6. Δ he o signal da differença de dous estados consecutivos de huma funcção : assim he $\Delta x = Vx - x$, e
Tom. III. Part. II. G $\Delta\Phi$

50 MEMORIAS DA ACADEMIA REAL

$$\Delta \Phi(x, y) = \Phi(x + i, y + i') - \Phi(x, y) = \Phi(Vx, Vy) - \Phi(x, y) = \Phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \Phi(x, y).$$

7. Σ he o symbolo do calculo inverso das differenças, ou inverso do calculo significado por Δ , e que applicado, depois que este o foi, a qualquer funcção a faz apparecer; assim he $\Sigma \Delta u = u$.

8. d e $\int$ são as characteristics dos calculos differencial e integral; e he tambem $\int du = u$.

9. Seja a hum multiplicador constante.

Os Symbolos $a, V, R, \Delta, \Sigma, d, \int$ quando concorrem não tem prioridade. Neste e nos tres numeros que o seguem daremos sómente as demonstrações que bastem para achar as das combinações analogas.

I. $Va \Phi x = a \Phi(x + i) = a V \Phi x.$

II. $\Delta a u = a V u - a u = a(V u - u) = a \Delta u.$

III. Escreva-se ΔU por u em $\Delta \Sigma u$, e será.....
 $\Delta \Sigma u = \Delta \Sigma \Delta U = \Delta U = u = \Sigma \Delta u.$

IV. $V \Delta \Phi x = V(\Phi(x + i) - \Phi x) = \Phi(x + 2i) - \Phi(x + i) = \Delta \Phi(x + i) = \Delta V \Phi x.$

V. $\Sigma V u = \Sigma V. \Delta \Sigma. u = \Sigma \Delta. V \Sigma u = V \Sigma u.$

VI. $R \Sigma u = R \Sigma. V R. u = R V \Sigma R u = \Sigma R u.$

VII. Escreva-se ΔU por u ; será.....
 $a \Sigma u = a \Sigma \Delta U = a U = \Sigma \Delta a U = \Sigma a \Delta U = \Sigma a u.$

10. Huma somma precedida de qualquer destes symbolos he igual á somma dos seus termos precedido cada hum do mesmo symbolo.

$$\Delta(\Phi x + \Psi x) = \Phi(x + i) + \Psi(x + i) - \Phi x - \Psi x = \Delta \Phi x + \Delta \Psi x.$$

11. Quando estes symbolos concorrem precedidos dos signais +, -; tambem tem lugar as regras da multiplicação para os signais.

Seja $a = -1$, será.....

$$- \Sigma. - Vu = - \Sigma a Vu = - a \Sigma Vu = --- \Sigma Vu = \Sigma Vu.$$

12. Os enunciados dos tres numeros precedentes tambem competem aos symbolos parciaes.

$$\begin{aligned} \text{I. } \nabla_{\frac{x}{y}} \Delta \Phi(x, y) &= \nabla_y \left(\Phi(x + i, y) - \Phi(x, y) \right) = \dots \\ &\Phi(x + i, y + i') - \Phi(x, y + i') = \Delta_x \Phi(x, y + i') \\ &= \Delta_x \nabla_y \Phi(x, y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \Delta_x \Delta_y \Phi(x, y) &= \Delta_x \left(\nabla_y \Phi(x, y) - \Phi(x, y) \right) = \Delta_x \nabla_y \Phi(x, y) \\ - \Delta_x \Phi(x, y) &= \nabla_y \Delta_x \Phi(x, y) - \Delta_x \Phi(x, y) = \Delta_y \Delta_x \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Do mesmo modo que temos discorrido nestes quatro numeros para huma ou duas raizes, se póde discorrer para mais, e podemos deduzir o seguinte

PRINCIPIO FUNDAMENTAL.

13. Em quanto u não he funcção determinada; os symbolos $V, R, \Delta, \Sigma, d, \int$, e os seus parciaes pódem ser tratados no decurso do calculo como multiplicadores, reservando a sua significação para o fim delle, e a fórma da funcção.

Neste principio consiste propriamente o que chamamos *Calculo das Notações*.

Axioma.

14. Operações identicas feitas sobre funcções iguaes dão resultados iguaes; pois isto he o mesmo que dizer funcções identicas de raizes iguaes são iguaes.

*Aplicações ao Calculo directo das Diferenças finitas.*

15. Pois he $Vu - u = \Delta u$, ou $Vu = u + \Delta u$, será pelo *principio fundamental* $Vu = (1 + \Delta)u$, isto he a operação denotada por V identica com a denotada por $1 + \Delta$, e logo pelo *Axioma* será $VVu = (1 + \Delta)(1 + \Delta)u = (1 + \Delta)^2 u$, e tambem

$$V^n u = (1 + \Delta)^n u = u + n \Delta u + n \frac{n-1}{2} \Delta^2 u + \dots \\ n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} \Delta^3 u + \&c.$$

Esta formula he o fundamento do Theorema de Taylor, e este o de todas as applicações do calculo differencial aos desenvolvimentos das funcções, e á Geometria curvilinear.

16. Do mesmo modo he $\Delta u = Vu - u = \dots (V - 1)u$, e tambem

$$\Delta^n u = (V - 1)^n u = V^n u - n V^{n-1} u + n \frac{n-1}{2} V^{n-2} u \\ - n \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3} V^{n-3} u + \&c.$$

Por exemplo : seja $u = \text{Sen. } x$, será $\Delta^2 \text{Sen. } x = \text{Sen. } (x + 2i) - 2 \text{Sen. } (x + i) + \text{Sen. } x = 2 \text{Sen. } (x + i) \text{Cos. } i - 2 \text{Sen. } (x + i) = 2 \text{Sen. } (x + i) (\text{Cos. } i - 1) = - (2 \text{Sen. } \frac{1}{2} i)^2 \text{Sen. } (x + i) = - (2 \text{Sen. } \frac{1}{2} i)^2 (\Delta \text{Sen. } x + \text{Sen. } x)$, e logo $\Delta^n \text{Sen. } x = \Delta^{n-2} \Delta^2 \text{Sen. } x = - (2 \text{Sen. } \frac{1}{2} i)^2 (\Delta^{n-1} \text{Sen. } x + \dots \Delta^{n-2} \text{Sen. } x)$. Fórmula dada por *Le Gendre* para a forma-

ma-



mação das Taboadas dos Senos : Veja-se o Calc. de *La Croix* N.º 888.

17. He $Vu = V_x(V)u$ (significando (V) nesta ultima expressão o estado variado relativamente a todas as raizes excepto a x já expressa) $= V_x V_y(V)u$ (significando (V) nesta ultima expressão o estado variado relativamente a todas as raizes excepto a x e y já expressas), e assim por diante.

18. Omittiremos a funcção u para maior liberdade, e por não haver nisso perigo; e será annexada quando a julgarmos precisa: assim em vez de dizer que he $-u = \Delta u - Vu$, diremos que he $-1 = \Delta - V = \Delta_x - V_x = (\Delta) - (V)$, e que he $\Delta \Sigma = 1 = RV$, &c.

19. He $V^n = V^{n-1}V = V^{n-1} + V^{n-1}\Delta = V^{n-1} + V^{n-2}\Delta + V^{n-2}\Delta^2 = V^{n-1} + V^{n-2}\Delta + V^{n-3}\Delta^2 + \dots + V^{n-3}\Delta^3 = \&c.$; theorema util nas interpolações, que vem no C. de *la Croix* N. 883 com esta fórmula $u = u_n + \Delta u_{n-1} + \Delta^2 u_{n-2} + \dots + \Delta^{n-2} u_1 + \Delta^{n-1} u + \Delta^n u$.

20. He $\Delta = V - 1 = V_x V_y V_z \dots - 1 = \dots$
 $(1 + \frac{\Delta}{x})(1 + \frac{\Delta}{y})(1 + \frac{\Delta}{z}) \dots - 1$, e logo $\dots$
 $\Delta^n u = \left\{ (1 + \frac{\Delta}{x})(1 + \frac{\Delta}{y})(1 + \frac{\Delta}{z}) \dots - 1 \right\}^n u$; Theo-

rema de *La Grange* que póde servir para achar com segurança a differença de qualquer ordem de huma funcção de qualquer numero de variaveis. *V. C.* de *La Croix* N. 869.

$$21. \text{ He } \Delta^n = (V - 1)^n = \left(V + \frac{\Delta}{x} - V \right)^n = \dots\dots\dots$$

$$\left(\frac{\Delta + V((V) - 1)}{x} \right)^n = \left(\frac{\Delta + V(\Delta)}{x} \right)^n = \left(\frac{\Delta + V\Delta + VV(\Delta)}{x} \right)^n =$$

$$\left(\frac{\Delta + V\Delta + VV\Delta + VVV(\Delta)}{x} \right)^n = \&c. \text{ Fórmula que pó-}$$

de servir para o mesmo que a antecedente, mas que he mais simples. Por exemplo: seja $u = \text{Sen. } x \text{ Sen. } y \text{ Sen. } z$, será $\Delta \text{ Sen. } x \text{ Sen. } y \text{ Sen. } z = \text{Sen. } y \text{ Sen. } z \Delta \text{ Sen. } x +$

$$\text{Sen. } (x + \Delta x) \text{ Sen. } z \Delta \text{ Sen. } y + \text{Sen. } (x + \Delta x) \text{ Sen. } (y + \Delta y) \Delta \text{ Sen. } z = 2 \text{ Sen. } y \text{ Sen. } z \text{ Cos. } \left(x + \frac{1}{2} \Delta x \right)$$

$$\text{Sen. } \frac{1}{2} \Delta x + 2 \text{ Sen. } (x + \Delta x) \text{ Sen. } z \text{ Cos. } \left(y + \frac{1}{2} \Delta y \right)$$

$$\text{Sen. } \frac{1}{2} \Delta y + 2 \text{ Sen. } (x + \Delta x) \text{ Sen. } (y + \Delta y) \text{ Cos. } \left(z + \frac{1}{2} \Delta z \right) \text{ Sen. } \frac{1}{2} \Delta z;$$

fórmula muito simples da differença de hum producto de Senos com as differenças explicitas das raizes.

22. Por ser $\Delta a^x = a^{x+i} - a^x = a^x (a^i - 1)$, será $\Delta^2 a^x = a^x (a^i - 1)^2$, e $\Delta^n a^x = a^x (a^i - 1)^n$ logo $\Delta^n a^x y =$

$$\left(\frac{\Delta + V\Delta}{x} \right)^n a^x y = \Delta^n a^x y + n \frac{\Delta^{n-1}}{x} V\Delta a^x y + \dots\dots\dots$$

$$n \frac{n-1}{2} \frac{\Delta^{n-2}}{x} V^2 \Delta^2 a^x y + \&c. , \text{ e logo he } \dots\dots\dots$$

$$\Delta^n a^x y = a^x \left\{ (a^i - 1)^n y + n (a^i - 1)^{n-1} a^i \Delta y + \dots\dots\dots \right.$$

$$\left. n \frac{n-1}{2} (a^i - 1)^{n-2} a^{2i} \Delta^2 y + \&c. \right\}$$

*Aplicações ao Calculo inverso das differenças.*

23. He $\Delta^n \Sigma^n = \Delta^{n-1} \Sigma^{n-1} = \Delta^{n-2} \Sigma^{n-2} = \&c. = \Delta \Sigma = 1$, e $\Delta^n \Delta^{-n} = \Delta^0 = 1$; logo he $\Delta^{-n} = \Sigma^n$.

24. Não havendo em u senão as raizes x e y : he $\Delta^n u = \left(\Delta_x + V_{xy} \Delta_y \right)^n u$; e logo $\Sigma u = \Delta^{-1} u = \left(\Delta_x + V_{xy} \Delta_y \right)^{-1} u = \Delta_x^{-1} u - \Delta_x^{-2} V_{xy} \Delta_y u + \Delta_x^{-3} V_{xy}^2 \Delta_y^2 u - \Delta_x^{-4} V_{xy}^3 \Delta_y^3 u + \&c. = \Sigma_x u - \Sigma_x^2 V_{xy} \Delta_y u + \Sigma_x^3 V_{xy}^2 \Delta_y^2 u - \Sigma_x^4 V_{xy}^3 \Delta_y^3 u + \&c.$, e es-

crevendo xy em lugar de u

$\Sigma xy = y \Sigma x - \Delta y \Sigma^2 (x + \Delta x) + \Delta^2 y \Sigma^3 (x + 2 \Delta x) - \&c.$ que encerra as fórmulas de *Taylor* e *Condorcet*, que vem no Calculo de *La Croix* N.º 910, e que são deduzidas ahi com trabalho pela integração por partes.

25. Substituindo x^m a y , e -1 a n na Serie do N.º 22. teremos a seguinte $\Delta^{-1} a^x x^m = \Sigma a^x x^m = \frac{a^x x^m}{a^1 - 1} - \dots$

$\frac{a^{x+1} \Delta x^m}{(a^1 - 1)^2} + \frac{a^{x+2} \Delta^2 x^m}{(a^1 - 1)^3} - \&c.$; Serie que termina sendo m numero inteiro positivo. Esta integração de $a^x x^m$ costuma-se fazer depender da de $a^x x^{m-1}$, e esta de $a^x x^{m-2}$, e assim por diante até chegar á de a^x que he $\frac{a^x}{a^1 - 1} + C$; mas isto he trabalhoso.

26. He $1 = R V = R (1 + \Delta) = R + R \Delta$, logo $\Sigma = \Sigma R + \Sigma R \Delta = \Sigma R + R$, e logo $\Sigma = \frac{R}{1 - R} = \dots$
R

$R + R^2 + R^3 + \&c.$ V. C. de *La Croix*. N.º 912. logo

$$\Sigma \frac{1}{x + ni} = \frac{1}{x + (n-1)i} + \frac{1}{x + (n-2)i} \dots + \frac{1}{x} +$$

$$(R + R^2 + R^3 + \&c.) \frac{1}{x}; \text{ e logo } \Sigma \frac{1}{x + ni} = \frac{1}{x + (n-1)i} +$$

$$\frac{1}{x + (n-2)i} \dots + \frac{1}{x} + \Sigma \frac{1}{x}.$$

sómente deste integral dependem todos os integrais das fracções do Calculo de *Bossut*; acha-se ahi deduzido por indução.

$$27. \text{ He } R = \frac{1}{1 + \Delta}, \text{ logo } R^n = 1 - n \Delta + \dots \dots \dots$$

$$n \frac{n+1}{2} \Delta^2 - n \frac{n+1}{2} \frac{n+2}{3} \Delta^3 + \&c., \text{ e logo } \Sigma u$$

$$= \Sigma R^n u = nu - n \frac{n+1}{2} \Delta u + n \frac{n+1}{2} \frac{n+2}{3} \Delta^2 u$$

$= \&c.$; o primeiro membro he hum integral somma definido, e os seus limites, sendo $u = f x$, são x , e $x - ni$.
V. C. de *La Croix*. N.º 912.

II.ª P A R T E.

28. **S**UPPOSTOS todos os principios, que se estabelecerão na primeira Parte, passaremos a fazer uso delles, nas applicações, que fizermos ao Calculo, que depende unicamente de Differenciaes com exponentes inteiros positivos, e negativos, isto he, ao Calculo Differencial e Integral; e depois ao Calculo, que depende simultaneamente de Differenciaes e Differenças tanto com expoentes inteiros positivos, como negativos, isto he, ao Calculo (que chamaremos) de Differenças mixtas. E para isto será conveniente lembrar os seguintes Principios.

29. Se for $u = \Phi(x, y \&c.)$, d a differencial total de u ; d_x a differencial de u relativa à x ; d_y só à y ; $\&c.$; e (d)

a differencial a respeito de todas as mais raizes: he $d^m \cdot d^n u = d^{m+n} u$, ou $d^m \cdot d^n = d^{m+n}$; e $+d(-d) = -d^2$; $d_x \cdot d_y = d_y \cdot d_x$; $d_x(d_x + d_y) = d_x d_x + d_x d_y$; $\&c.$; isto he, que se póde livremente trabalhar com os indices differenciaes, como se fossem coefficients algebricos, (N. 13.)

30. Em vez de d_x^{-n} póde escrever-se $\int_x^n$, que he o integral da ordem n relativamente à x : assim $d^m d_x^{-n}$ he $= d^m \int_x^n = \int_x^n d^m$; $\&c.$

31. Sabe-se que he $du = d_x u + (d) u = \left(d_x + (d) \right) u = \left(d_x + d_y + (d) \right) u = \&c.$, isto he, que a differencial to-



58 MEMORIAS DA ACADEMIA REAL

tal he igual a somma das differencias parciais. Logo, por ser $d = d_x + (d)$, será (N.º 15.) para n inteiro

$$d^n = (d_x + (d))^n$$

32. Sabe-se tambem que he $d^n = (d_x + (d))^n = \dots$

$$d_x^n + n d_x^{n-1} (d) + n \frac{n-1}{2} d_x^{n-2} (d)^2 + \&c.; \text{ e que tam-}$$

bem he $d^n = (d_x + (d))^n = d_x^n + n (d) \cdot (d_x + (d))^{n-1} d_x^{n-1} + n \frac{n-1}{2} (d)^2 (d_x + (d))^{n-2} d_x^{n-2} + \&c.$, pelo segundo desenvolvimento do binomio, que termina quando n he inteiro negativo.

33. Igualmente se sabe que he $d^{m+n} (x^{m+n}) = \dots$
1. 2. 3. $(m+n) d x^n \cdot d x^m$; e por isso he

$$\int x^{m+n} d x^m = \frac{x^{m+n}}{1.2.3....(m+n) d x^n}.$$

Aplicação ao Calculo Differencial e Integral.

34. Achar $d^n (uy)$.

$$\text{Por ser } d^n (uy) = (d_y + d_u)^n (uy) = \dots$$

$$(d_y^n + n d_u \cdot d_y^{n-1} + n \frac{n-1}{2} d_u^2 \cdot d_y^{n-2} + \&c.) (uy) = \dots$$

$$d_y^n (uy) + n d_u \cdot d_y^{n-1} (uy) \dots + d_u^n (uy) \text{ he } d^n (uy) =$$

$$n d_y^n y + n d u \cdot d_y^{n-1} y + n \frac{n-1}{2} d^2 u \cdot d_y^{n-2} y \dots + d^n u \cdot y.$$



35. *Corollario.* Proposta huma expressão da fórma seguinte $u \cdot d^n y + u \cdot d^{n-1} y + u \cdot d^{n-2} y \dots + u \cdot y$ para que esta seja a differencial exacta da ordem n de huma função finita $u y$, he preciso que seja $u = n du$, $u = n \frac{n-1}{2} d^2 u$, &c., e $u = d^n u$: e estas são as equações de condição (*).

36. Achar $\int^n u d x^n$; e $\int^n u d^n x$.

He $\int^n = d^{-n} = \left(\frac{d}{x} + \frac{d}{u} \right)^{-n} = d^{-n} - n \frac{d^{-n+1}}{x} \frac{d}{u} + n \frac{n+1}{2} d^{-n+2} \frac{d^2}{u^2} - \dots$; logo $\int^n u d x^n = u \int^n d x^n - n du \cdot \int^{n+1} d x^n + n \frac{n+1}{2} d^2 u \cdot \int^{n+2} d x^n - \dots$; e logo pelo (N.º 33.) he $\dots \int^n u d x^n = u \cdot \frac{x^n}{1.2 \dots n} - n \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{x^{n+1}}{1.2.3 \dots (n+1)} + n \frac{n+1}{2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{x^{n+2}}{1.2.3.4 \dots (n+2)} - \dots$;
H ii e

(*) O Sr. Stockler (no Tom. II. das Memórias da Academia Real das Sciencias de Lisboa para o anno de 1791.) já tinha chegado a simplificar muito as equações de condição dadas por *Condorcet*, reduzindo-as a outras, que neste algorithmo são as seguintes $du - \frac{1}{n} u = 0$, du

$- \frac{2}{n-1} u = 0$, &c. e $du - n u = 0$; que nos foi facil deduzir das do *Corollario*, e tambem por ellas se verificação as de *Condorcet*: exaqui a primeira $d^n u - d^{n-1} u + d^{n-2} u \dots \pm d^0 u = d^n u - n d^n u + n \frac{n-1}{2} d^n u \dots \pm d^n u = (1 - n + n \frac{n-1}{2} - \dots \pm 1) d^n u = (1 - 1)^n d^n u = 0$, &c., e assim as outras.

(**) Veja-se o Calculo de *La Croix*. (N.º 488.)

e pelo mesmo estilo se achará ser

$$\int^n u d^n x = u x - n \frac{du}{dx} \cdot \frac{x^2}{1.2} + n \frac{n+1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} - \&c.$$

37. *Corollario.* Quando $n = 1$, acha-se (por ambas) a seguinte

$$\int u dx = u x - \frac{du}{dx} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} - \&c.$$

que he a formula das quadraturas de *João Bernoulli*.

$$38. \text{ Achar } \int (U \cdot d^n y + U_1 \cdot d^{n-1} y + U_2 \cdot d^{n-2} y \dots + U_n \cdot y).$$

Pois he $\int = d^{-1} = \left(\frac{d}{y} + (d) \right)^{-1}$; logo

$$\left(d_y^{-1} - (d) \cdot d_y^{-2} + \&c. \right) (U \cdot d^n y + U_1 \cdot d^{n-1} y \dots + U_n \cdot y) = U \cdot d^{n-1} y$$

$$+ U_1 \cdot d^{n-2} y + U_2 \cdot d^{n-3} y \dots + U_n \cdot d^{-1} y$$

$$- dU \cdot d^{n-2} y - dU_1 \cdot d^{n-3} y \dots - dU_{n-1} \cdot d^{-1} y - dU_n \cdot d^{-2} y$$

$$+ d^2 U \cdot d^{n-3} y \dots + d^2 U_{n-2} \cdot d^{-1} y + d^2 U_{n-1} \cdot d^{-2} y + d^2 U_n \cdot d^{-3} y$$

$$- \&c. \dots - d^3 U \cdot d^{-2} y - d^3 U_{n-2} \cdot d^{-3} y + \&c.$$

$$\text{Logo he } \int (U \cdot d^n y + U_1 \cdot d^{n-1} y + U_2 \cdot d^{n-2} y \dots + U_n \cdot y) = \dots$$

$$U \cdot d^{n-1} y + (U - dU) d^{n-2} y + (U - dU + d^2 U) d^{n-3} y \dots +$$

$$(U - dU + d^2 U - \dots \pm d^{n-1} U) y; \text{ se for } U - dU + d^2 U - \dots$$

$$\pm d^n U = 0, \text{ a equação de condição: e basta só esta, porque}$$

os coefficients de $d^{-2}, d^{-1}, \&c.$, são as differenciaes successivas desta, e por isso deverá tambem ser $dU - d^2 U + \dots + d^{n+1} U = c$, $d^2 U - d^1 U + \dots + d^{n+2} U = 0$, $\&c.$; Theorema mui util no Calculo integral, e que he devido a *Euler*.

39. Se for $U \cdot d^n y + U \cdot d^{n-1} y \dots + U \cdot y + X \cdot d^n z + X \cdot d^{n-1} z \dots + X \cdot z$ huma differencial exacta, serão $U - dU + \&c. = 0$, $X - dX + \&c. = 0$ as equações de condição, para que a proposta tenha hum integral da ordem immediatamente inferior.

40. Assim como da proposta $U \cdot d^n y + \&c.$ se passou para huma expressão differencial da ordem immediatamente inferior, que he o seu integral; assim tambem se poderia com hum expoente $-m$ em lugar de -1 ter passado para huma do gráo $n - m$, e achado as condições de integrabilidade.

41. Sendo $\delta \mathcal{C} = U \cdot d^n \delta y + U \cdot d^{n-1} \delta y \dots + U \cdot \delta y$; achar $\int \delta \mathcal{C}$.

Pois $\delta = d$, e $\int = (d + (d))^{-1}$; logo será $\int \delta \mathcal{C} =$

$(d + (d))^{-1} (U \cdot d^{n+1} y + U \cdot d^n y \dots + U \cdot dy)$; e logo

(N.º 38.) he $\int \delta \mathcal{C}$ ou $\delta \int \mathcal{C} = U \cdot d^n y + (U - dU) d^{n-1} y \dots +$

$(U - dU + \dots + d^{n-1} U) dy$; se for $U - dU + d^2 U - \dots +$

$d^n U = 0$. V. C. de *La Croix*. N.ºs 819. e 820.



42. *Corollario.* Se for $\mathcal{C}$ só funcção de y , então (por ser $\delta = d_y$, e neste caso $\int = d_y^{-1}$) será $\mathcal{C} = U d^n y + (U - dU) d^{n-1} y \dots + (U - dU + \dots + d^{n-1} U) dy$.

43. Sendo $R = a + b x^n$; achar $\int R^p x^m dx$.

Seja d_x só relativa á $x^m dx$, e (d) á R^p ; pois pelo (N.º 32.) he, quando $n = -1$, $(d + (d))^{-1} = d_x^{-1} - (d + (d))^{-1} \cdot (d) \cdot d_x^{-1}$, logo he $\int = \int_x - \int \cdot (d) \cdot \int_x$; logo he $\int R^p \cdot x^m dx = \int_x (R^p \cdot x^m dx) - \int (d) \int_x (R^p \cdot x^m dx) = \dots \dots \frac{1}{m+1} R^p \cdot x^{m+1} - \int d(R^p) \cdot \int_x x^m dx$; e logo (por ser $d R^p = p R^{p-1} dR = n b p R^{p-1} x^{n-1} dx$) será $\int R^p x^m dx = \frac{1}{m+1} R^p x^{m+1} - \frac{n b p}{m+1} \int x^{m+n} \cdot R^{p-1} dx$.

Que he huma das seis formulas para reduzir hum integral a outro.

Appliação ao Calculo das Diferenças mixtas.

44. Achar $\Sigma x^0, \Sigma x, \Sigma x^2, \dots$ ou Σx^n .

Pois he pelo Theorema de Taylor $\Delta u = \frac{\Delta x}{dx} du + \dots \frac{1}{1.2.} \cdot \frac{\Delta x^2}{dx^2} \cdot d^2 u + \&c.$, ou $\Delta = \frac{\Delta x}{dx} d + \frac{\Delta x^2}{2 dx^2} d^2 + \&c.$; logo (para qualquer valor inteiro de n) será Δ^n

$$\Delta^n = \left(\frac{\Delta x}{d x} d + \frac{\Delta x^2}{2 d x^2} d^2 + \&c. \right)^n;$$

Logo nesta formula pondo $n = -1$, teremos (praticando a divisão de 1 por $\frac{\Delta x}{d x} d + \&c.$) a seguinte formula

$$\Sigma = \frac{d x}{\Delta x} \int - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{\Delta x}{d x} \cdot d - \frac{1}{720} \cdot \frac{\Delta x^3}{d x^3} \cdot d^3 + \&c.$$

com a qual se podem achar os integraes sommas; assim pelo (N.º 33) será $\Sigma x^0 = \frac{x}{\Delta x} + C$; $\Sigma x = \frac{x^2}{2 \Delta x} - \frac{x}{2} + C$; $\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3 \Delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x \Delta x}{6} + C$; $\&c.$

N. B. Estes integraes sommas são achados (como se vê) independentemente huns dos outros. Veja-se, o C. de *La Croix*. N.º 898.

OBSERVAÇÕES.

AFASTANDO-NOS, mas sómente no progresso do Calculo, da recommendação dos Authores de se não confundirem os signaes das Diferenças com multiplicadores, conseguimos entender, descobrir, e conservar Theoremas difficeis, uteis, e celebres.

Nisso fizemos o que nos era licito: pois as demonstrações, em que he fundado este Calculo produzem em nós a convicção das cousas provadas.

Este Calculo pela sua simplicidade nos tira o receio d'errar.

Com seu soccorro evitámos as induções, de que ordinariamente se fazem sahir os theoremas mencionados, as quaes consistem em dar por determinada a fórmula supposta a huma função, quando ella satisfaz a muitas raizes: modo de concluir perigoso.

Parece que pôdem passar para os Elementos theoremas, que pela extensão, e difficuldade da sua investigação, ahi faltavão.

Talvez estejam em parte satisfeitos os desejos dos Amigos da Sciencia, de que as regras dos Calculos Integraes fossem tão simples, como as dos Calculos das Diferenças finitas, ou não finitas.